新JISたより

不確かさの考え方⑧

－回帰分析の不確かさ－

温度計の校正において，最小二乗法を用いた校正線の求め方と，校正線から得られる補正の予測値とその標準不確かさの求め方を考える。

ある温度計に対して，21℃から27℃の温度範囲において，n＝11の温度の読み値t_kと，対応する基準温度$t_{R,k}$とを比較するすることにより，補正$b_k = t_{R,k} - t_k$を求めるための校正を行い，最小二乗法を用いて，以下に示す1次の校正線を求めるものとする。

$$y = a(t - t_0) + b \tag{1}$$

温度t_0は基準温度であり，aとb及びそれらの推定分散を求めれば，(1) 式を用いて，任意の温度tにおいて温度計に与えられるべき補正値とその標準不確かさを推定することができる。

最小二乗法によって，(1) 式のaとb及びそれらの推定分散を次式で表される和を最小にすることによって求めることができる。

$$S = \sum_{k=1}^{n}[y_k - a(t_k - t_0) - b] \tag{2}$$

これから，aとb，それらの実験分散$s^2(a)$，$s^2(b)$，及び推定相関係数$r(a,b) = s(a,b)/s(a)s(b)$に対する次の式が導かれる。ここで，$s(a,b)$は推定共分散である。

$$a = \frac{(\sum y_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum y_k\theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{3}$$

$$b = \frac{n\sum b_k\theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{4}$$

$$s^2(a) = \frac{S^2\sum {\theta_k}^2}{D} \tag{5}$$

$$s^2(b) = n\frac{S^2}{D} \tag{6}$$

$$r(a,b) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}} \tag{7}$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n\sum (t_k - \bar{t})^2 \tag{8}$$

$$S^2 = \frac{\sum [y_k - y(t_k)]^2}{n-2} \tag{9}$$

$$\theta_k = t_k - t_0 \qquad \bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n \qquad \bar{t} = (\sum t_k)/n \tag{10}$$

上式で，和は全てk＝1からnまでをとり，分散S^2は，二つのパラメータaとbがn個の観測値から決められるため，自由度は (n－2) となることを示している。

ここで，相関係数は (7) 式の分子が0になるようにt_0を選ぶことによって，aとbの間に相関がなくなり，補正の予測値の標準不確かさの計算を簡略化することができる。そのためには，t_0に温度計の読み値の平均を用いればよい。その場合の校正線を次式で表す。

$$y = a(t - \bar{t}) + b \tag{11}$$

表1　温度計の校正線を求めるデータ

	基準温度計の読み値	校正対象温度計の読み値	補正の観測値	
No.	t_R	t	$y = t_R - t$	$\theta = t - \bar{t}$
1	21.350	21.521	−0.171	−2.48745
2	21.843	22.012	−0.169	−1.99645
3	22.349	22.512	−0.166	−1.49645
4	22.844	23.003	−0.159	−1.00545
5	23.343	23.507	−0.164	−0.50145
6	23.834	23.999	−0.165	−0.00945
7	24.357	24.513	−0.156	0.50455
8	24.845	25.002	−0.157	0.99355
9	25.344	25.503	−0.159	1.49455
10	25.849	26.010	−0.161	2.00155
11	26.351	26.511	−0.160	2.50255
読みの平均値 $\bar{t}$		24.0085	$\sum \theta_k$	0
標準偏差 u (t)		1.6559		

表2　切片及び勾配

	係数	標準誤差	
切片（b）	－0.16245	u（b）	0.001055
勾配（a）	0.002183	u（a）	0.000668

表3　バジェットシート（t=25℃の場合）　(℃)

因子	感度係数 ci		u（x）		$c_i$xu（x_i）
温度計の読み	a	0.002183	u（t）	1.656	0.003614
勾配	t－ $\bar{t}$	0.9915	u（a）	0.000668	0.000662
切片	―	1	u（b）	0.00105	0.001055
二条和					1.641E－05
合成標準不確かさu_c（y）					0.00382

この式に対して，不確かさの伝播則を適用して合成標準不確かさの式を表す。

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 u^2(t) + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 u^2(b)$$
$$= a^2 \cdot u^2(t) + (t-\bar{t})^2 \cdot u^2(a) + u^2(b) \qquad (12)$$

表1にデータの事例を示す。補正の観測値yについてマイクロソフトのアドインソフトを用いて回帰分析を行う。その結果が表2である。また，得られた回帰式の結果を図1に示す。

t=25℃における合成標準不確かさを以下の数値を（12）式に代入して求める。その結果を表3のバジェットシートに示す。

温度計の読みの平均　$\bar{t}$ =24.0085 ℃

温度の不確かさ　u（t）=1.6559 ℃

勾配 a=0.00218 ℃/℃

勾配の不確かさ　u（a）=0.000668 ℃/℃

切片 b=－0.16545 ℃

切片の不確かさ　u（b）=0.001055 ℃

$$u_c(y) = [a \cdot u(t)]^2 + [(t-\bar{t}) \cdot u(a)]^2 + [u(b)]^2$$
$$= \sqrt{[0.00218 \times 1.656]^2 + [(25.0 - 24.0085) \times 0.000668]^2 + 0.00105^2}$$
$$= 0.00382\ ℃ \qquad (13)$$

この結果から，温度の読み値25℃の場合の拡張不確かさは，$U = 0.0076$ ℃ $(k = 2)$ となる。

なお，この場合，基準温度を読み値の平均値としているため，図2に示すように平均温度から離れるほど合成標準不確かさは大きくなる。

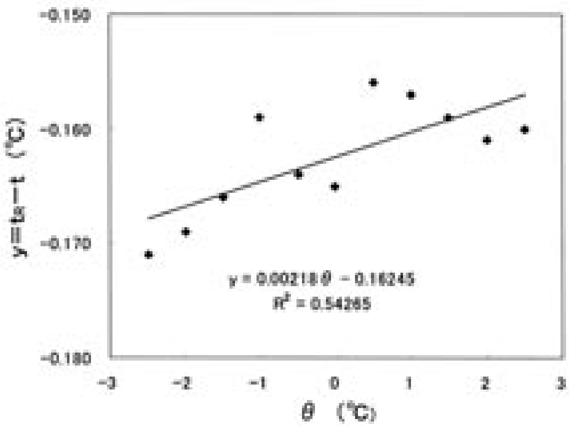

図1　回帰式

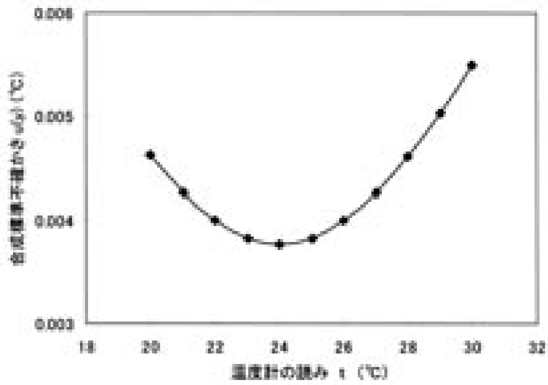

図2　温度計の読みと合成標準不確かさ

◆以上，アドインソフトを使って機械的に不確かさの推定を試みた。アドインソフトを使うことによって（2）～（9）式の回帰分析の複雑な論理式を意識せずにすむ。

次回は最近の動向について紹介する予定。

（文責：製品認証部　上園）

◆参考文献

計測における不確かさの表現のガイド　p.160～p.166

日本規格協会発行