新JISたより

不確かさの考え方⑦

ー分散分析の活用ー

測定の目的は適当な個数のサンプルの試験結果から母集団の平均を推定することと，同時に母集団の不確かさを標準偏差で推定することである。しかし，試験の都度不確かさを求めるのは合理的とはいえないので，事前にある程度の数の実験を行い予め求めておくのが一般的な考え方である。

今回は，測定データを用いて統計処理を行うタイプAの評価法について述べる。不確かさの要因数やデータ数に応じていくつかの方法が考えられる。前回の事例では公式から単純に標準偏差を求めているが，不確かさの変動要因が複数の場合には，分散分析法を利用すると要因別に不確かさを分離することができる。分散分析の本来の目的とははずれるかもしれないが，ここではあまり深く考えずパソコンのアドインソフトを使って単純に要因別の標準偏差を求める方法について述べる。

■ 既存の品質管理データによる不確かさ評価

表1に示すデータのバラツキ度合いを考える。通常，このデータの平均を求め，各測定値と平均の差（偏差）を見れば平均値からのバラツキ具合が分かる。全体のバラツキ具合はこれらの偏差をすべて合計すればいいが，これらの偏差は＋側も－側もあるため合計はゼロになり，単純に合計したのでは評価することができない。そこで正負の影響を消すために偏差を二乗して合計する。これを偏差の平方和又は変動という。

また，平方和の平均を分散と呼ぶが，統計上データの個数ではなく，自由度で割って求める。平方和は二乗している関係で単位の次元も二乗である。これを本来の次元に戻すために平方根をとって標準偏差で表す。

表1のデータはコンクリートの圧縮試験の品質管理のデータである。1ロットにつき，1回3本のサンプルについて3回試験を行っている。**表1**の結果は次のようになる。

総平均

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{k \times n} = \frac{2332.2}{90} = 25.913$$

総平方和（総変動）

$$S_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$= (25.2 - 25.91)^2 + \cdots + (22.3 - 25.91)^2 = 316.84$$

ここで，ロット数 k ＝10，繰り返し n ＝9である。

表1　測定データ事例（圧縮強度試験　単位　N／㎟）

	1回			2回			3回			平均 $\bar{x}_i$	総平均 $\bar{\bar{x}}$	偏差 $\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}$	偏差平方和 $\sum(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$
ロット	1	2	3	1	2	3	1	2	3				
R1	25.2	24.3	25.2	27.2	26.5	27.5	26.4	26.2	26.9				
R2	24.6	25.5	25.5	25.3	24.4	24.1	26	25.1	24.8	26.16	25.91	0.24	7.339
R3	28.6	27.5	28.4	23.9	24.8	25.7	23.3	23.4	24.1	25.03		−0.88	
R4	28.1	27.5	27.1	28.4	25.5	26.7	26.6	27.2	26.6	25.52		−0.39	
R5	23.4	23.8	23.8	26.7	27.8	28.0	25.2	24.4	23.9	27.08		1.16	
R6	24.4	24.4	24.4	26.7	26.7	27.9	25.8	25.3	25.3	25.22		−0.69	
R7	24.8	24.3	24.7	25.3	25.5	25.7	29.4	29	29.4	25.66		−0.26	
R8	28.6	26.6	26.0	26.9	26.7	25.8	27.8	28.3	27.9	26.46		0.54	
R9	22.2	22.7	22.9	26.0	26.2	26.7	30	30.4	30.8	27.18		1.26	
R10	25.1	25.3	26.1	25.1	25.5	25.6	22.4	22.2	22.3	26.43		0.52	
総和	2332.2									24.40		−1.51	

このデータから分散と標準偏差を求めると次のようになる。

$$\text{分散}\quad V_T=\frac{S_T}{(kn-1)}=\frac{316.84}{10\times 9-1}=3.56 \quad (N/mm^2)$$

$$\text{標準偏差}\quad \sigma_T=\sqrt{V_T}=1.89 \quad (N/mm^2)$$

これは，90個のデータのバラツキの度合いを表している。

次にロットが変わることによる効果をみる。ロット間効果は，ロットごとの平均が総平均に対してどのようにばらついているかを見ればよい。これは次式で求めることができる。

$$S_A=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2=n\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2=9\times 7.339=66.055$$

ロット内にバラツキがなければ総平方和 (S_T) と偏差平方和 (S_A) とは等しくなるはずであるが，実際には差が生じる。この差は，ロットの条件をそろえたとしても除くことのできないバラツキで，これが誤差変動 (S_e) である。つまり，$S_e=S_T-S_A$ の関係がある。**図1**に示すように，総変動を要因変動と誤差変動に分離することができる。

データのもっている変動を要因や誤差に分離してその効果を評価する方法を分散分析という。

一元配置の分散分析表は**表2**のようになる。

各自由度は，

$$\phi_A=k-1=10-1=9$$
$$\phi_e=k(n-1)=10(9-1)=80$$
$$\phi_T=\phi_A+\phi_e=89$$

となる。

これらの計算は，Microsoft Excelのアドインソフトの分析ツールの中から分散分析を選択すると自動的に計算してくれる。ここでは，要因をロットとする一元配置の分散分析を使用した。結果は分散分析表の形で表示される。**表3**は分散分析表から必要とする項目を取り出したものである。

表2　一元配置の分散分析表

要因	変動（偏差平方和）	自由度	不偏分散（平均平方）	分散の期待値
要因A	S_A	ϕA	$V_A=S_A/\phi A$	$E(V_A)=Ve-n\cdot\sigma_A{}^2$
誤差e	S_e	ϕe	$V_e=S_e/\phi e$	$E(V_e)=V_e=\sigma_e{}^2$
合計T	S_T	ϕT	$V_T=S_T/\phi T$	

表3　一元配置による分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散
	S	ϕ	V
ロット間（A）	66.055	9	7.339
繰り返し誤差（e）	250.789	80	3.135
合計（T）	316.844	89	

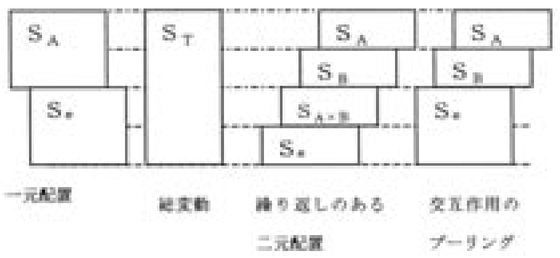

図1　変動（二乗和）の分離

ここで，ロット間変動はロットの製造の問題であり不確かさ評価から除外する。ロット内変動は同じ条件で製造しても避けられない変動を表しており，これを繰り返し誤差として不確かさの評価に加える。ここでいう誤差は母集団の平均との差の意味で使っている。

繰り返しにおける不確かさは，

$$\sigma_e=\sqrt{\mathrm{Ve}}=\sqrt{3.135}=1.77 \qquad N/mm^2$$

として求めることができる。

これは，**表1**のデータを用いて推定した母集団の標準不確かさと考える。実際の試験では1回につき3本のサンプルの平均を求めるとするならば，試験結果の不確かさは母集団の不確かさを$\sqrt{3}$で割って「平均の不確かさ」とする必要がある。

この不確かさにその他の不確かさ，例えば荷重計やノギスの校正の不確かさ等を考慮して不確かさの伝播則で合成標準不確かさを求めればよい。

合成標準不確かさ $u_c = \sqrt{u_P^2 + u_d^2 + u_e^2}$ (N/mm^2)

ここに、u_P：荷重計の校正の不確かさ (N/mm^2)

u_d：直径測定器の校正の不確かさ (N/mm^2)

$u_e = \dfrac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 1.02$：1回当たりサンプル3本の平均の不確かさ (N/mm^2)

3回9本の平均を求めるなら$\sqrt{9}$ つまり3で割る。

ここで，荷重計の校正の不確かさや直径測定器の不確かさの単位は圧縮荷重の単位に変換することが重要である。場合によっては，荷重計やノギスの不確かさは繰り返し誤差の不確かさに比べて小さすぎるので殆ど寄与しないことがある。

◆二元配置による不確かさの求め方

次に要因が2つの場合の事例について考える。分散分析表は**表4**のようになる。用いるデータはロット数（a＝4），試験機（b＝3），繰り返し（n＝5）による**表5**とする。なお，一般にa，b，nを水準と呼んでいる。つまり，3台の試験機を用いて5回の繰り返し測定を4ロットについて行っている。

表6は繰り返しのある二元配置による分散分析の結果であり，**図1**のように総変動が要因別に分離できたことになる。複数の要因について分散分析を行うと交互作用が表われる。交互作用とは2つ以上の要因を組み合わせた場合，お互いに影響しあうことによる変動である。ここでは単純化するために交互作用は繰り返し誤差に含めることに

表4　二元配置の分散分析表

要因	変動（偏差平方和）	自由度	不偏分散（平均平方）	分散の期待値 E(Vi)
要因A	S_A	ϕ_A	$V_A=S_A/\phi_A$	$\sigma_e^2 + bn\sigma_A^2$
要因B	S_B	ϕ_B	$V_B=S_B/\phi_A$	$\sigma_e^2 + an\sigma_B^2$
交互作用 A×B	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$	$\sigma_e^2 + n\sigma_{A\times B}^2$
誤差e	S_e	ϕ_e	$V_e=S_e/\phi_e$	σ_e^2
合計T	S_T	ϕ_T	$V_T=S_T/\phi_T$	

表5　試験機とロットによる二元配置データ

ロット	試験機			平均	分散
	B1	B2	B3		
A1	42.9	40.9	43.2	42.10	1.284
	44.0	40.6	43.3		
	42.6	41.4	41.9		
	41.9	40.2	41.2		
	43.4	42.3	41.6		
A2	39.9	39.8	40.0	40.80	0.776
	39.4	41.6	42.1		
	40.9	40.3	41.3		
	41.7	41.0	40.4		
	42.2	41.4	40.0		
A3	42.2	41.2	43.2	42.36	0.752
	41.4	43.1	42.4		
	42.3	40.7	42.5		
	43.5	41.6	42.5		
	43.8	42.4	42.7		
A4	42.9	41.8	40.7	41.43	1.411
	42.9	40.8	40.4		
	43.3	42.4	39.5		
	41.4	40.9	40.2		
	41.6	40.0	42.4		
平均	42.22	41.22	41.58		
分散	1.499	0.762	1.469		

表6（1）　二元配置による分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散
ロット(A)	22.181	3	7.394
試験機(B)	10.413	2	5.207
交互作用(A×B)	9.901	6	1.650
繰り返し誤差(e)	38.800	48	0.808
合計(T)	81.295	59	

表6（2）　プーリング後の分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	分散の期待値
ロット(A)	22.181	3	7.394	$\sigma_e^2 + an\sigma_A^2$
試験機(B)	10.413	2	5.207	$\sigma_e^2 + bn\sigma_B^2$
繰り返し誤差(e)	48.701	54	0.902	σ_e^2
合計(T)	81.295	59		

した。この処理のことをプーリングという。プールした結果が**表6（2）**である。

表6（2）は分散の期待値を書き加えてある。分散分析表における分散の値は誤差を含むデータから計算されているため，分散の本来持つべき構造を表したものが分散の期待値である。分散の期待値から誤差分散を除くと要因による純粋の分散が得られ，標準偏差を求めることができる。

分散の期待値から分散及び標準偏差を求めると次のようになる。

$a=4 \quad b=3 \quad n=5$

繰り返し $\sigma_e{}^2 = 0.902$

$$\sigma_e = \sqrt{0.902} = 0.950$$

試験機 $\sigma_B{}^2 = \dfrac{V_B - \sigma_e{}^2}{an} = \dfrac{5.207 - 0.902}{4 \times 5} = 0.215$

$$\sigma_B = \sqrt{0.215} = 0.464$$

ロット $\sigma_A{}^2 = \dfrac{V_A - \sigma_e{}^2}{bn} = \dfrac{7.394 - 0.902}{3 \times 5} = 0.433$

$$\sigma_A = \sqrt{0.433} = 0.658$$

これで，繰り返し誤差に起因する不確かさ，試験機に起因する不確かさ，ロットに起因する不確かさが得られたことになる。

ここで留意すべきは，このもとになったデータは，ある試験室において所有する3台の試験機を用いて複数のロットについて不確かさを求めるためのデータ採りをしたということである。

実際の試験では，3台の試験機の内のいずれか1台を用いて，3本のサンプルの平均を求めている。

したがって，繰り返し誤差については平均の不確かさを求める。試験機に起因する不確かさついては試験機を3台用いているが，平均する必要はない。また，ロットに起因する不確かさはサンプルの製造に起因するものとして除外する。そのほか校正等による不確かさを考慮して，不確かさの伝播則によって合成標準不確かさを次のように表すことができる。

$$u_c{}^2 = |u_{cal}(ノ)|^2 + |u_{cal}(荷)|^2 + u_B^2 + u_e^2 \quad (N/mm^2)^2$$

ここに，

$u_{cal}(ノ)$：ノギスの校正の不確かさ (N/mm^2)

$u_{cal}(荷)$：試験機の荷重計の校正の不確かさ (N/mm^2)

$u_B = \sigma_B = 0.464$：試験機間のバラツキに起因する不確かさ (N/mm^2)

$u_e = \dfrac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0.548$：サンプル３本の平均の不確かさ (N/mm^2)

となる。ここでの留意点はノギスの校正や荷重計の校正の不確かさを含めて全て同じ単位になっていることである。

◆今回は，一元配置と二元配置の分散分析による不確かさ　推定方法の事例を示した。このほかに三元配置等の多元配置法がある。分散分析の取り扱いについては，要因の水準の取り方によって分散の期待値の構造が変わるが，ここでは便宜的に変動要因を分離する手法として用いている。詳しくは，下記の文献を参照されることを望む。

また，サンプルのバラツキや製造過程に起因するバラツキ等の扱いについては異論があるところであろう。

次回は最小二乗法による不確かさを解説する。

（文責：製品認証部　上園正義）

◆参考文献

(1) 分散分析入門　石川馨、米山高徳著　日科技連出版社発行

(2) 実験の計画と解析　谷津進著　日本規格協会発行

(3) 不確かさ評価に用いる統計的手法について　田中秀幸著　建材試験情報12/2003 p.6〜p.11