新JISたより

不確かさの考え方⑥

ー不確かさ推定の事例ー

■ 測定の目的

測定の目的は測定量の値を決定することである。したがって，測定は測定量，測定の方法，測定手順を明示することからはじまる。

測定の結果は測定量の値の近似値あるいは推定値に過ぎない。このため推定値の不確かさの記述を伴って完全なものになる。また，測定量は実際的な目的に対して値が定まるように定義しなければならない。例えば，金属棒の長さをノギスの正確さで測定する場合には，金属棒を測定したときの温度を含める必要がある。

＜事例1＞

■ 測定の概要

金属棒の直径を求める。

■ 測定方法

ノギスを用いて，金属棒の直径を5回測定し，その平均を求める。

測定は，温度20℃±2℃の室内で行う。ただし，温度はリアルタイムで測定し補正を行うものとする。金属棒の熱膨張率は文献より，仮に28.9×10^{-4} (K^{-1}) とする。

■ 測定機器

ノギス：校正証明書より拡張不確かさ0.05㎜

デジタル温度計：分解能0.1℃

■ 不確かさのモデル式

この場合，測定量（金属棒の直径）Yはノギスの読みXであり，一般的にモデル式を表すと

Y＝X

となる。モデル式は，数学モデル，数学的モデル，数式モデル，関数モデル等いろいろに呼称されているが，ここではあまり抵抗のないモデル式と呼ぶことにする。

さらに，金属棒の直径の算定式に熱膨張率や温度の要因を考慮すると次式で表わされ，これをモデル式とする。

$$d = d_n\{1+\alpha(t-20)\} \quad [㎜] \tag{6.1}$$

ここに，
- d ：金属棒の直径［㎜］
- d_n ：ノギスの指示値［㎜］
- α ：熱膨張率［K^{-1}］
- t ：金属棒の温度［℃］

■ 不確かさの要因

(1) 金属棒の直径dの不確かさ（合成標準不確かさ）：$u_c(d)$

（この表記はdの関数を意味しない不確かさを表す記号である。）

(2) ノギスの指示値d_nの不確かさ：$u(d_n)$

(3) 室温tの不確かさ：$u(t)$

(4) 熱膨張率αの不確かさ：$u(\alpha)$

■ 直径測定の不確かさの推定式

直径測定の不確かさはモデル式を用いて次の合成標準不確かさの式から求める（5月号p.45参照）。

$$u_c^2(d) = c_n^2\cdot u^2(d_n) + c_t^2\cdot u^2(t) + c_\alpha^2\cdot u^2(\alpha) \quad [㎜] \tag{6.2}$$

ここに，
- $u_c(d)$ ：直径の合成標準不確かさ［㎜］
- $u(d_n)$ ：ノギスの指示値の標準不確かさ［㎜］
- $u(t)$ ：温度測定の標準不確かさ［K］
- $u(\alpha)$ ：熱膨張率の標準不確かさ［K^{-1}］
- $c_n : u(d_n)$ の感度係数［K/K］
- $c_t : u(t)$ の感度係数［㎜/K］
- $c_\alpha : u(\alpha)$ の感度係数［㎜・K］

■ 要因別の標準不確かさ

(1) ノギスの指示値の不確かさを求める

ノギスの校正の不確かさと繰り返し測定の不確かさを考える。

①ノギスの校正の不確かさ　$u_{cal}(d_n)$

ノギスの校正証明書に，拡張不確かさ0.05㎜（k＝2）と記載されていたとする。

$$u_{cal}(d_n) = \frac{0.05}{2} = 0.025 \quad [㎜]$$

②繰り返し測定の不確かさu rep (d_n)

金属棒全体の直径の不確かさを評価するためには，中央を含めて場所をずらして測定することが考えられるが，ここでは，便宜的に金属棒の中央で方向をずらして5回測定したデータを用いる（**表1**）。なお，測定作業による不確かさは繰り返し測定に含めるものとする。

③ノギスの指示値の標準不確かさ

$$u(d_n) = \sqrt{u_{cal}^2(d_n) + u_{rep}^2(d_n)} = \sqrt{0.025^2 + 0.0338^2}$$

$$= 0.0420 \ [\text{mm}]$$

(2) 温度測定の不確かさを求める。

温度は，分解能が0.1℃の温度計によって測定する。室温の変動は補正されるが，分解能0.1Kの読み値によって不確かさが生じる。

なお，リアルタイムの補正を行わない場合は，室温の変動による不確かさも考慮する必要がある。このような場合は一様分布とみなし，不確かさは，

$$u(t) = 0.05/\sqrt{3} = 0.0289 \quad (\text{K})$$

となる（**図1**）。

④熱膨張率の不確かさは，他の不確かさに比べて小さいので除外する

表1　繰り返し測定データ

回数	読取値	平均値との差	差の二乗
1	32.35	0.09	0.0081
2	32.23	−0.03	0.0009
3	32.33	0.07	0.0049
4	32.21	−0.05	0.0025
5	32.18	−0.08	0.0064
合計	161.30	0.00	0.0228

平均 $\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k} = 32.26$

分散$_i$ $V = \frac{1}{(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{i,k} - \overline{X}_i\right)^2 = 0.0057$

標準偏差

$s(X_i) = \sqrt{V} = \sqrt{0.0057} = 0.0755$

平均の標準偏差（5点の平均）

$s(\overline{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} = \frac{0.0755}{\sqrt{5}} = 0.0338$

標準不確かさ　$u_{rep}(d_n) = s(\overline{X}_i)$

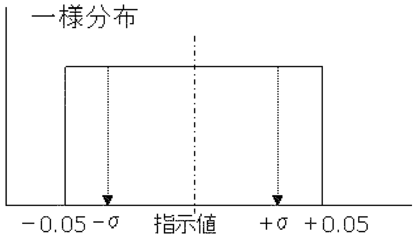

図１　温度の一様分布に基づく評価

■ 感度係数の意味

感度係数は入力量（ノギスの読み）が測定値（金属棒の直径）に与える影響の大きさを表している。モデル式（6.1）を温度 t，熱膨張率 α の関数に変形する。

$$d = (\alpha \cdot d_n) \cdot t + d_n(1 - 20 \cdot \alpha) \qquad (6.3)$$

$$d = \left\{ d_n(t - 20) \right\} \cdot \alpha + d_n \qquad (6.4)$$

（6.1），（6.3），（6.4）式の2項目は定数項とみる。d_n，t，α の関数で表されている。これらの式の d_n，t，α の係数が“感度係数”である。感度係数は一般式では偏導関数（偏微分係数）で表す。

つまり，d_n，t，α の不確かさ $u(d_n)$，$u(t)$，$u(\alpha)$ にそれぞれの感度係数を乗じることによって，それぞれの要因が直径の単位mmに変換され，測定の不確かさ $u(d)$ に与える影響の度合いを示すことになる（**図2**）。ここで，測定した直径の読みの平均 d_n =32.26mm，熱膨張率 α =28.9×10^{-4}（K^{-1}）を代入して具体的な感度係数を求める。なお，熱膨張率の不確かさは除外したので感度係数は求めない。

■ 合成標準不確かさ

以上の結果を（6.2）式に代入して合成標準不確かさを求める。この計算はエクセル等によるバジェットシートで自動的に計算してくれる。

表2　バジェットシート

	不確かさの要因	記号	値	確率分布	除数	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ	備考
①	ノギスの指示値の不確かさ	$u\,(d_n)$				0.0420 ㎜	1 K/K	0.0420 ㎜	―
②	ノギスの校正の不確かさ	$u_{cal}\,(d_n)$	0.005㎜	正規	2	0.025 ㎜			校正証明書より
③	繰り返し測定の不確かさ	$u_{rep}\,(d_n)$	0.0338㎜	正規	1	0.0338 ㎜			5回測定
④	温度による不確かさ	$u\,(t)$	0.05 ℃	一様	$\sqrt{3}$	0.0289　k	0.0932㎜/K	0.00269 ㎜	分解能より
⑤	合成標準不確かさ	$u_c\,(d)$						0.0421 ㎜	―
⑥	拡張不確かさ（k=2）	U						0.084 ㎜	―
⑦	測定結果の表示	d=3236±0.084㎜（k=2）							―

$$\begin{aligned} u_c(d) &= \sqrt{\left[c_n \cdot u(d_n)\right]^2 + \left[c_t \cdot u(t)\right]^2} \\ &= \sqrt{(1\times 0.042)^2 + (0.0932\times 0.0289)^2} \\ &= 0.0421 \end{aligned}$$

■ 拡張不確かさ

合成標準不確かさから拡張不確かさへの変換は信頼の水準を反映する包含係数を用いる。拡張不確かさは　$U=k\times u_c$ で表す。測定結果は$y\pm U$で表わされる。一般的には$k=2$を採用し，信頼の水準がほぼ95%に相当すると考える。$k=2$とした場合，$y-U$と$y+U$の区間の中にほぼ95%の信頼の水準で測定値が存在していることを示している。拡張不確かさを表示する場合には，それから標準不確かさを逆算できるように包含係数kを併記するのがルールである。

■ バジェットの作成

以上の結果をバジェットシート（**表2**）にまとめる。その手順は以下のとおりである。○内の数字はバジェットシートの番号を示す。

(1) 値の欄に校正証明書，実験データで得た標準偏差，温度計の分解能等の数値を入れる。
(2) 確率分布を決定する。
(3) 値の欄の数値を確率分布で決まる除数で除して標準不確かさを求める②③④。単位に注意する。
(4) 指示値の標準不確かさ①は，②と③の標準不確かさを二乗和の平方根で合成して求める。

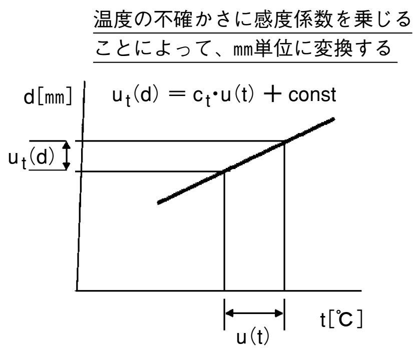

図2　入力量の不確かさが測定量の不確かさに与える影響

(5) ①及び④の標準不確かさに感度係数を乗じて標準不確かさを㎜単位に合わせる。
(6) ㎜単位に合わせた①と④を二乗和の平方根で合成し，合成標準不確かさを求める⑤。
(7) 合成標準不確かさに感度係数（k=2）を乗じて拡張不確かさ⑥を求める。
(8) 測定結果に不確かさを加味して表示する⑦。

（文責：製品認証部　上園正義）

＜訂正とお詫び＞
2007年5月号新JISたより「不確かさの考え方⑤」に訂正がありました。
訂正前：P45右段10～12行目
「このとき，長期間にわたる温度変化や測定期間中の温度変化を考慮し，温度計の分解能に起因する不確かさは考慮する必要はない。」
訂正後：「このとき，温度計の分解能や測定期間中の温度変動を考慮する。」