新JISたより

不確かさの考え方⑤

「計測における不確かさの表現のガイド」(GUM)の概要　その2

前回に引き続きGUMの概要を説明する。

4.　標準不確かさの評価

◇ 測定のモデル化

多くの場合，測定量Yは直接には測定されず，他のN個の観測量（入力量）　$X_1, X_2, \cdots, X_N$ から次の関数 f により決定される。

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

例えば，圧縮試験や引張試験では，破壊強度Fを破壊直前の最大荷重Pを断面積Aで除して求める。この場合，測定量はFであり，観測量はPやAである。

モデル式は，　$F = f(P, A) = P / A$

となる。

また，断面積Aがサンプルの半径rを用いて $A = \pi \cdot r^2$ で表すなら，

$$F = f(P, r) = P / \pi \cdot r^2$$

となる。

さらに，そのサンプルの半径が温度依存性を持ち，その温度係数を α とし温度 t_0 に補正される場合は，

$$F = f(P, r, \alpha, t) = P / \pi \cdot r[1 + \alpha(t - t_0)]$$

となる。

モデル式の各観測量について標準不確かさを求める。

◇ 測定結果の計算

通常，測定結果yは，N個の観測量Xから得られる測定量Yのn個の平均値である。

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{N,k})$$

このとき，関数 f が非線形の場合，測定結果yは，個々の入力量のそれぞれの平均値

$$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_N$$

からyを求めるよりも，一組の入力量

$$X_1, X_2, \cdots, X_N$$

から測定量Yを求め，それを平均する方が望ましい。線形の場合はどちらでも同じ結果が得られる。これは，不確かさの推定手順に関係する。

例えば，**表1**において

表1　測定結果の計算例

入力量と測定量		測定回数 1	2	3	4	5	平均
X_1	直径 R	100.4	100.5	100.4	100.3	100.3	100.38
X_2	荷重 P	865	905	875	926	928	899.8
Y	強度 P	109.26	114.08	110.52	117.20	117.45	113.703
入力量X_1，X_2の平均値から求めた測定結果 y の値							113.700

$\overline{X}_1 = R = (100.4 + 100.5 + 100.4 + 100.3 + 100.3)/5 = 100.38\ mm$

$\overline{X}_2 = P = (865 + 905 + 875 + 926 + 928)/5 = 899.8\ kN$

$y = P/(\pi \cdot r^2) = 899.8 \times 1000/(100.38/2)^2/\pi = 113.700\ N/mm^2$

ただし、$r = R/2$　とする。

このように求める場合と，次のように求める場合がある。

$$Y_1 = P_1/(\pi \cdot (R_1/2)^2) = 865 \times 1000/(100.4/2)^2/\pi = 109.26\ N/mm^2$$
$$Y_2 = 114.08 \quad Y_3 = 110.52 \quad Y_4 = 117.20 \quad Y_5 = 117.45$$
$$y = (109.26 + 114.08 + 110.52 + 117.20 + 117.45)/5 = 113.703$$

5.　合成標準不確かさ

◇ 不確かさの伝播則

測定結果yの不確かさは，yに付随するXiの入力推定値（Xiのn個の平均）x_i のそれぞれの推定標準偏差 $u(x_i)$ を合成して合成標準不確かさ $u_c(y)$ で表す。これは，次式で決定され，不確かさの伝播則と呼ばれている。

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)$$

ここに、$u_c(y)$: 合成標準不確かさ
$u_c^2(y)$: 合成分散
x_i：入力推定値
$u(x_i)$: 入力推定値の不確かさ
$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$：感度係数

◇ カタログ値の活用

yに付随する不確かさは，カタログなどの仕様に記載されている許容差から求めることができる。この場合，許容差のみが与えられていて，分布についての情報がない場合には，取り得る値は区間内のどこにでも同じ確率で測定値が存在すると仮定する矩形分布を適用する。これはBタイプ評価という（1月号p.42参照）。

◇ 不確かさの重複カウント

不確かさの合成は，重複カウントを避けることが重要である。例えば，ある測定で温度係数が関係するとき，温度の変化によって測定値が変動することが考えられる。このとき，最小分解能が0.1℃の温度計で，リアルタイムに温度を測定し補正を行っているとする。この場合，温度計の分解能に起因する不確かさを考慮し，補正を行っているので，測定中の温度変動や長期間にわたる温度変化は考慮する必要はない。

ある場合には，恒温室内で測定しているので，リアルタイムで温度を測定していないことがある。このとき，長期間にわたる温度変化や測定期間中の温度変化を考慮し，温度計の分解能に起因する不確かさは考慮する必要はない。

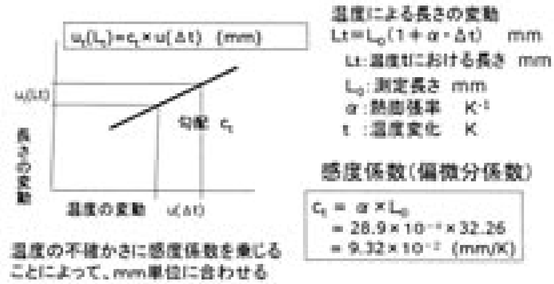

図1　温度の効果による感度係数

◇ 感度係数

通常，感度係数は，モデル式の偏微分係数から計算する。また，実験によって決定することもできる。

モデル式が非常に複雑な場合，実験を行って，ある要因の変化と出力との関係式から，感度係数を求めることができる。温度依存性が影響する場合，温度係数を既知の定数から求めることもできる。**図1**は，温度依存性による感度係数の例である。

◇ 相対標準不確かさ

モデル式が $Y = cX_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdots X_N^{p_N}$

という形で表されるならば，合成標準不確かさを次式の相対標準不確かさの形で表すことができる。各要因が独立でない場合に有効である。

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2$$

6.　拡張不確かさの決定

測定結果は，通常，Y＝y±Uと表記される。Uは，拡張不確かさで，合成標準不確かさに包含係数を乗じて求める。これは，測定量に結びつけられる値の最良推定値がyであり，合理的にYに結びつけられ得る値の分布の大部分（例えば，95%）を含むと期待できる区間が，y－Uからy＋Uまでの区間に存在することを意味する。

推定値yの数値とその標準不確かさ又は拡張不確かさは，多くとも2桁の有効数字で十分である。

計算途中の有効数字は，4桁程度で計算ことで次のような不具合を避けることができる。

9.545→9.55→9.6

このケースで有効数字2桁では，9.5である。

附属書E

◇ 不確かさの不確かさ

推定された不確かさがどの程度の不確かさであるかが示されている。

不確かさの不確かさは，

$\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$　　で表される。

この式の各記号の意味は，次のとおりである。正規分布に従う確率変数qの独立なn個の観測値の平均値を求め，これを数回繰り返して実験標準偏差 $s(\overline{q})$ を求める。これは平均値の実験不確かさに相当する。これをさらに無限回繰り返して求めた標準偏差 $\sigma\left[s(\overline{q})\right]$ が「不確かさの不確かさ」になる。さらに，これを無限回の平均値の標準偏差 $\sigma\left[s(\overline{q})\right]$ で除して相対標準不確かさを表す。

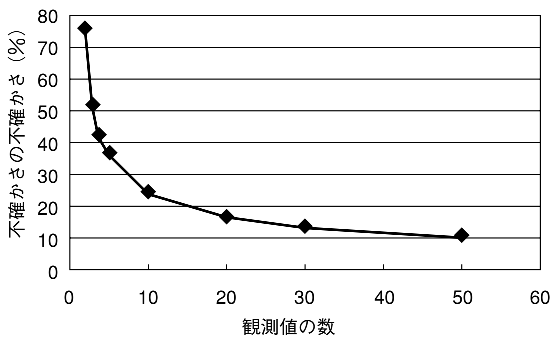

図2　不確かさの関係

図2は，観測値の数nと「不確かさの不確かさ $\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$」との関係を示したものである。**図2**によると，例えばn=10の観測値に対して24%にもなる。50以上に増やしても10%の不確かが残る。つまり，測定の不確かさは不確かであることを示している。不確かさの推定は，労力，時間，コストを考慮して合理的に行うべきであるといわれる由縁である。

GUMの概要を説明するに当たって，GUMを引用しながら，研修会における講師の解説や筆者の補足を交えて記述した。これは，GUMの内容の一部である。GUMを最初のページから読み進めても理解するのは容易ではない。GUMにどのようなことが書かれているのかを理解し，辞書的に活用するのが賢明であるというのが，筆者が研修を受けたときの講師の弁である。

次回は不確かさ推定の事例について紹介したい。

（文責：製品認証部　上園正義）

＜引用・参考文献＞

(1) 計測における不確かさの表現ガイド

(2)「計測における不確かさの表現ガイド」の読み方
　㈱産業技術総合研究所　田中秀幸